Convergencia con variables aleatorias

Virgilio L. Foglia

November 25, 2007

Octubre 2006

Contents

1 Lema de Borel-Cantelli

1.1 Definiciones previas

Sea (Ω, A, P), un espacio de probabilidad, y $A_1, A_2, ..., A_n, ..$ una sucesión de sucesos. Notar que cuando se efectúa el experimento aleatorio ε, y surge como resultado un $\omega \in \Omega$, habrán algunos A_n, de la sucesión de sucesos, que se realizarán, y otros que no. Si estamos interesados en los $\omega \in \Omega$, que hacen que se realicen **por lo menos uno** de los A_n de la sucesión, estaremos interesados en el suceso $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Por otro lado si nos interesan los $\omega \in \Omega$, que hacen que se realicen **todos** los A_n de la sucesión, estaremos interesados en el suceso $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. En relación a estos sucesos valen las siguientes proposiciones:

$$\text{Si } \ A_n \subset A_{n+1} \text{ y } \ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \implies P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{1}$$

$$\text{Si } A_n \supset A_{n+1} \ \text{ y } \ A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \implies P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{2}$$

Aunque no se demuestran, son bastante naturales. Pero en temas de convergencia con variables aleatorias suelen interesar otros sucesos, también construidos con los A_n. Por ejemplo pueden intereasar los $\omega \in \Omega$, que hacen que se realicen infinitos A_n. De otra manera, no importa cuanto avancemos el indice k, siempre encontraremos más adelante, sucesos que se realizarán. Se define entonces el límite superior (A^{∞})de una sucesión de sucesos así:

Límite superior

$$A^{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ está en infinitos } A_n\} \qquad (3)$$

Por último, pueden interesar los $\omega \in \Omega$,que hacen que se realicen **todos** los A_n a partir de cierto indice.Se define entonces el límite inferior (A_{∞})de una sucesión de sucesos así:

Límite inferior

$$A_{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ está todos los } A_n \text{ a partir de cierto } n_0\} \qquad (4)$$

1.2 Lema de Borel-Cantelli

Sea (Ω, A, P), un espacio de probabilidad, y $A_1, A_2, ..., A_n, ..$ una sucesión de sucesos.

- **(a)** Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad P(A^{\infty}) = 0$
- **(b)** Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ y A_n son **independientes** $\quad \Longrightarrow \quad P(A^{\infty}) = 1$

Para ambas demostraciones usamos que:

$P(A^{\infty}) = P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)$ pero $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ es una sucesión decreciente en k ya que

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \supset \bigcup_{n=3}^{\infty} A_n \supset ....$ y usando (2) $\quad P(A^{\infty}) = \lim_{k \to \infty} P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)$

Dem(a):

$$P(A^{\infty}) = \lim_{k \to \infty} P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \lim_{k \to \infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = 0 \text{ (usando la hipótesis)}$$

Dem(b):

$$P(A^{\infty}) = \lim_{k \to \infty} P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) = 1 - \lim_{k \to \infty} P(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c)$$

Pero $P(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c) = \lim_{m \to \infty} P(\bigcap_{n=k}^{m} A_n^c) = \lim_{m \to \infty} \prod_{n=k}^{m} (1 - P(A_n))$

pero $\forall p$, $0 \leq p \leq 1$ vale $1 - p \leq e^{-p}$ luego

$$P(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c) \leq \lim_{m \to \infty} \prod_{n=k}^{m} e^{-P(A_n)} = \lim_{m \to \infty} e^{-\sum_{n=k}^{m} P(A_n)} = 0 \text{ (por hipótesis)}$$

Luego resulta que $P(A^{\infty}) = 1$.

1.2.1 Corolario

Si aplicamos leyes de Morgan a $A_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ resulta

$(A_\infty)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^c = (A^c)^\infty$

Luego si en lugar de la sucesión $A_1, A_2, ..., A_n, ..$consideramos la sucesión de complementos, o sea $A_1^c, A_2^c, ..., A_n^c, .$el Lema de Borel-Cantelli queda expresado:

- **(a)** Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) < \infty \quad \Longrightarrow \quad P(A_\infty) = 1$
- **(b)** Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) = \infty$ y A_n son **independientes** $\quad \Longrightarrow \quad P(A_\infty) = 0$

2 Desigualdades con variables aleatorias

Ahora se presentan algunos teoremas que permiten en condiciones muy generales, acotar el calculo de ciertas probabilidades.Como no se asume el conocimiento de las distribuciones de las v.a. involucradas, solo algunas medias y desvíos, las cotas proporcionadas son en general muy malas desde un punto de vista práctico. Sin embargo, son muy útiles para estudiar convergencia con variables aleatorias.

2.1 Desigualdad de Markov

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } X \text{ una v.a.} \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ y } \textbf{par} \\ g \text{ no decreciente en módulo} \\ E(g(x)) < \infty \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad P(|X| \geq \varepsilon) \leq E(g(x))/g(\varepsilon)$$

Dem:

Como $g(x) \geq g(\varepsilon)$ para $|X| \geq \varepsilon$
y $\quad g(x) \geq 0 \quad$ para $|X| < \varepsilon$
Resultará $g(x) \geq g(\varepsilon)\ I_{|X| \geq \varepsilon}(X)$
luego $\quad E(g(x)) \geq g(\varepsilon)\ E(I_{|X| \geq \varepsilon}(X)) = g(\varepsilon) P(|X| \geq \varepsilon)$

2.2 Teorema de Tchebichev

Si X es una v.a. con $\sigma^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2/\varepsilon^2$

Dem:

Resulta de tomar en la desigualdad de Markov la v.a, $X - \mu$ y $g(x) = x^2$.

2.3 Desigualdad de Kolmogorov

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, .., X_n \textbf{ v.a. indep.} \\ E(X_i) = 0 \quad Var(X_i) < \infty \\ S_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} X_k \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad P(\underset{1\leq\, i\, \leq n}{máx} |S_i| \geq \varepsilon) \leq Var(S_n)/\varepsilon^2$$

2.3.1 Observación

Si aplicamos la desigualdad de Tchebichev a la v.a. S_n resulta

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq Var(S_n)/\varepsilon^2$$

Pero en la desigualdad de Kolmogorov aparece $P(\underset{1\leq\, i\, \leq n}{máx} |S_i| \geq \varepsilon)$. Sin embargo como

$$\{|S_n| \geq \varepsilon\} \subset \left\{\underset{1\leq\, i\, \leq n}{máx} |S_i| \geq \varepsilon\right\} \quad \text{resulta} \quad P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq P(\underset{1\leq\, i\, \leq n}{máx} |S_i| \geq \varepsilon)$$

Luego la afirmación de Kolmogorov es más fuerte, ya que

$$P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq P(\underset{1\leq\, i\, \leq n}{máx} |S_i| \geq \varepsilon) \leq Var(S_n)/\varepsilon^2$$

3 Convergencia con variables aleatorias

3.1 Introducción

Sea un experiento aleatorio ε, y un espacio de probabilidad (Ω, A, P). Se define la sucesión de variables aleatorias

$$\begin{array}{l} X_1\!: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ X_2\!: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n\!: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad \text{y} \quad X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Queremos analizar en que sentido podemos hablar de convergencia de la secuencia $X_1, X_2, ...X_n....$ a X. Obviamente la intención es ver si para n grande, podemos reemplazar X_n por X en algún sentido y, en caso afirmativo, precisar el alcance de este reemplazo. O sea podremos para n grande:

♦ aproximar $P(X_n \leqq a)$ por $P(X \leqq a)$?
♦ aproximar $E(X_n)$ por $E(X)$?
♦ si Z es otra v.a. definida en el **mismo** espacio, aproximar $\rho_{X_n,Z}$ por $\rho_{X,Z}$?

Ejemplo Sea el experimento ε:"tirar infinitas veces una moneda", y supóngase definido un espacio de probabilidad (Ω, A, P).

Luego, un resultado del experimento ε, tiene el aspecto:

$$\omega = (c, s, s, c, s, c, c, c.s, s, c, s, ...)$$

Sea la variable aleatoria X: "probabilidad de cara en el primer tiro", que en realidad

es la constante 1/2.

Se definen para cada $\omega \in \Omega$:

$X_1(\omega)$: "(número de caras en la primera tirada de ω)/ 1"

$X_2(\omega)$: "(número de caras en las dos primeras tiradas de ω)/ 2"

$X_3(\omega)$: "(número de caras en las tres primeras tiradas de ω)/ 3"

....

$X_n(\omega)$: "(número de caras en las n primeras tiradas de ω)/ n"

....

En este ejemplo queremos investigar, la posible convergencia de la secuencia de variables aleatorias a la constante 1/2.

3.2 Conjunto de convergencia

Como las variables aleatorias $X_1, X_2, ...X_n, ..$y X, son en realidad todas funciones de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, notar que para cada $\omega \in \Omega$, $X_1(\omega), X_2(\omega), ...X_n(\omega), ..$es una sucesión de números reales, y $X(\omega)$ es también un número real. Entonces $\omega \in \Omega$ será un punto de convergencia de la sucesión $X_n(\omega)$ a $X(\omega)$ **sii**

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbb{N}, \text{ tq. si } \ n \geq n_o \Longrightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$$

Si designamos Θ, el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$, en que se da la convergencia puntual

$$\Theta = \{\omega \in \Omega : \forall\varepsilon > 0, \ \exists n_o \in \mathbb{N}, \ \ \text{tal que si} \ \ \ n \geq n_o \Longrightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$$

en palabras: ω será un punto de convergencia, si $\forall\varepsilon > 0$, a partir de cierto n_o se cumple siempre

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$$

Pero se expresará este conjunto de otra forma.

$$\Theta = \left\{\omega \in \Omega : \forall\varepsilon > 0, \ \exists n_o \in \mathbb{N}, \ \ \text{con} \bigcap_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)\right\}$$

$$\Theta = \left\{\omega \in \Omega : \forall\varepsilon > 0, \ \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)\right\} \tag{5}$$

Como nos vemos en la necesidad de verificar el cumplimiento de una infinidad de condiciónes, definimos para cada $\varepsilon > 0$, la **sucesión de sucesos**

$$A_n^\varepsilon = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$$

y entonces como

$$\bigcup_{n_0=1} \bigcap_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) = \bigcup_{n_0=1} \bigcap_{n \geqq n_0} A_n^\varepsilon = A_\infty^\varepsilon$$

$$\Theta = \{\omega \in \Omega : \forall \varepsilon > 0, \ \omega \in A_\infty^\varepsilon\} \tag{6}$$

3.3 Convergencia punto a punto

Esta definición de convergencia es la clásica del análisis, para la convergencia de sucesiones de funciones

$$X_n \longrightarrow X \quad \textbf{sii} \quad \Theta = \Omega \tag{7}$$

O sea, la sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, ...X_n, ..$converge a la variable aleatoria X, cuando la sucesión real $X_1(\omega), X_2(\omega), ...X_n(\omega), ..$converge a $X(\omega)$, en **todo** punto $\omega \in \Omega$.

⧫ Notar que en esta definición, si bién suponemos que tanto las $X_1, X_2, ...X_n, .$como X, pertenecen a un mismo espacio de probabilidad (Ω, A, P), no interviene para nada el P del espacio de probabilidad.

3.3.1 Observación

Esta definición de convergencia es demasiado fuerte. Notar que exige, **para todo** resultado $\omega \in \Omega$,la convergencia de la sucesión de números reales $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $X_3(\omega), ...X_n(\omega)...$ a $X(\omega)$ Si en el ejemplo, al efectuar el experimento aleatorio, el resultado es

$$\omega = (c, c, c, c, c, c, c, c.c, c, c, c, ...)$$

(o sea salen todas caras), la sucesión de valores de las $X_n(\omega)$ sería 1,1,1,1,1,1,. . .que claramente no converge a 1/2. La pregunta aquí es: ¿serán "muchos" los $\omega \in \Omega$ en que no se da la convergencia?

3.4 Convergencia en casi todo punto

Esta es la primera definición de convergencia en que haremos uso del concepto de probabilidad. Aquí sí interviene el P del espacio (Ω, A, P). Debemos aceptar que a veces, como en la observación anterior, obtendremos como resultado del experimento aleatorio, un $\omega \in \Omega$ en que no se logra la convergencia. Pero si el conjunto de estos resultados tiene probabilidad cero, no estaremos restringiendo mucho la definición de convergencia (o, lo que es lo mismo, si el conjunto Θ, de resultados en que se da la convergencia tiene probabilidad 1).Definiremos entonces:

$$X_n \overset{c.t.p.}{\longrightarrow} X \quad \textbf{sii} \quad P(\Theta) = 1 \tag{8}$$

3.4.1 Dos definiciónes equivalentes

Si recordamos el conjunto de $\omega \in \Omega$, en que se da la convergencia puntual

$$\Theta = \{\omega \in \Omega : \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_o \in \mathbb{N}, \text{ tal que si } \quad n \geq n_o \Longrightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}$$

que en (5) lo expresamos como:

$$\Theta = \left\{ \omega \in \Omega : \forall \varepsilon > 0, \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) \right\}$$

obviando detalles, la condición $P(\Theta) = 1$, equivale a pedir que

$$\forall \varepsilon > 0, P(\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)) = 1$$

o sea

$$\textbf{Primera definición: } \forall \varepsilon > 0,\ P(A_{\infty}^{\varepsilon}) = 1 \tag{9}$$

y también usando (1), esto equivale a:

$$\textbf{Segunda definición: } \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n_0 \to \infty} P(\bigcap_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)) = 1 \tag{10}$$

- Notar que para verificar el cumplimiento de la primera definición, se puede usar la parte (a) del Corolario de Borel-Cantelli, ya que si se cumple :

  $$\forall \varepsilon > 0 \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^{\varepsilon c}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon) < \infty \Longrightarrow P(A_{\infty}^{\varepsilon}) = 1$$

  Por otro lado, el cumplimiento de la parte (b) del Corolario de Borel-Cantelli da una condición suficiente para el **no cumplimiento** de la convergencia en **c.t.p.** ya que implica $P(A_{\infty}^{\varepsilon}) = 0 \neq 1$.

- Respecto de la segunda definición, quiere decir que $\forall \varepsilon > 0$, se podrá encontrar un n_0, tal que el conjunto de los ω en que vale $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$ **desde n_0 en adelante**, tendrá probabilidad tan cercana a 1 como se quiera.

3.5 Convergencia en Probabilidad

Analizando el último comentario, todavía podemos disminuir las exigencias en una definición de convergencia, que sin embargo sea útil para las variables aleatorias. Eliminando la parte en negrita del comentario (a la segunda definición de convergencia en casi todo punto), queda la definición de convergencia en probabilidad:

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \text{sii} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \tag{11}$$

Ejemplo En el problema de las monedas, si C_n :"número de caras en las n primeras tiradas de ω" resulta $C_n \backsim B_i(n;1/2)$. Y como $X_n = C_n/n$, también $E(X_n) = 1/2$, y $\sigma(X_n) = 1/(2\sqrt{n})$. Luego por Tchebishev

$$\forall\varepsilon > 0,\ 1 \geq P(|X_n(\omega) - 1/2| < \varepsilon) \geq 1 - 1/(4n\varepsilon^2)$$

y tomando límite para $n \to \infty$, resulta que $X_n \xrightarrow{P} 1/2$

3.6 Convergencia en media Cuadrática

Dada la sucesión $X_1, X_2, .., X_n, ..$ y X, todas en el mismo espacio (Ω, A, P). Se define convergencia en media cuadrática:

$$X_n \xrightarrow{MC} X \quad \textbf{sii} \quad \lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0 \tag{12}$$

⧫ Notar que esta definición de convergencia, a diferencia de la convergencia en probabilidad, requiere la existencia de las esperanzas $E(X_n - X)^2$.

3.6.1 Teorema

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = \theta \\ \lim\limits_{n\to\infty} Var(X_n) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{MC} \theta$$

Dem:

$E(X_n - \theta)^2 = Var(X_n) + (E(X_n) - \theta)^2$ y tomando límite.

⧫ Este teorema es útil en estadística, ya que si se tiene una sucesión de estimadores que son asintóticamente insesgados,o sea $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ con $E(X_n) \to \theta$, cuya varianza $Var(X_n) \to 0$, resultará $X_n \xrightarrow{MC} \theta$, y también, como se verá en (14) esto implica que $X_n \xrightarrow{p} \theta$, o sea la sucesión de estimadores será **consistente**.

3.7 Convergencia en Distribución

En los cuatro tipos de convergencia estudiados hasta ahora teníamos la sucesión $X_1, X_2, X_3, ...X_n, ..$ y X, todas definidas en el mismo espacio (Ω, A, P), y la convergencia resultaba de exigir distintas condiciones de cercanía entre los miembros de la sucesión y X. Y en el caso de convergencia en casi todo punto, y en probabilidad, la verificación de la convergencia solía no ser tarea fácil, ya que exigía conocer el comportamiento probabilístico conjunto de los elementos de la sucesión y de X. Que tal si ahora consideramos la sucesión de funciones de distribución de las variables que integran la secuencia:

$$F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3}, ...F_{X_n}, ...$$

y que esta sucesión de funciones converge a una función de distribución F_Y,(que no tiene porque coincidir con F_X, ya que no hicimos intervenir para nada a X en esta convergencia, es mas, podemos desconocer a X).Se dice entonces que $X_n \xrightarrow{D} Y$. Pero notar que esto es un abuso de notación por dos motivos:

- en realidad la convergencia es entre $F_{X_n} \to F_Y$
- la variable Y es una variable dummy, representa **cualquier** variable aleatoria que tenga por función de distribución a F_Y. No tiene porqué estar definida en el espacio (Ω, A, P). La definición de convergencia en distribución exige además una condición de continuidad:

$$X_n \xrightarrow{D} Y \ \ \textbf{sii} \ \ \begin{cases} \exists F_Y \ \ \text{función de distribución, tal que} \\ \forall y, \text{ punto de continuidad de } F_Y \\ \underset{n\to\infty}{lím} \ \ F_{X_n}(y) \to F_Y(y) \end{cases} \tag{13}$$

Observación Considerese dos variables aleatorias X, e Y,ambas N(0;1), independientes, y definidas en un mismo espacio de probabilidad (Ω, A, P).
Se define la sucesión:
$X, X, X, ..., X, ...$ (o sea $X_1 = X$, $X_2 = X, ...$ etc.)
Notar que $X_n \xrightarrow{D} Y$ pero X_n no converge a Y en ninguno de los cuatro primeros tipos de convergencia.Y esto es debido a que al ser X_n e Y independientes, no es posible asegurar su cercanía para ningun $\omega \in \Omega$.
(por supuesto, aunque es trivial, vale la convergencia $X_n \to X$,para los cuatro tipos de convergencia estudiados).

4 Relación entre los tipos de Convergencia

Si $X_1, X_2, ...X_n, ..$y X, están definidas en un mismo espacio (Ω, A, P) :

$$\begin{array}{ccccccc} X_n \longrightarrow X & \underset{(a)}{\Longrightarrow} & X_n \xrightarrow{c.t.p} X & \underset{(b)}{\Longrightarrow} & X_n \xrightarrow{P} X & \underset{(c)}{\Longrightarrow} & X_n \xrightarrow{D} X \\ & & & & \overset{(d)}{\Uparrow} & & \\ & & & & X_n \xrightarrow{mc} X & & \end{array} \tag{14}$$

Dem(a):

Si $\Theta = \Omega$ entonces $P(\Theta) = P(\Omega) = 1$

Dem(b):

Como $\bigcap\limits_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) \subset (|X_{n_0}(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)$, resultará

$$P\left(\bigcap_{n \geqq n_0} (|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon)\right) \leq P(|X_{n_0}(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) \leq 1$$

como $\forall \varepsilon > 0$ el lado izquierdo tiende a 1, resulta la tesis.

Dem(c):

tomando x, punto de continuidad de F_X, notar que si

$$|X_n - X| < \varepsilon \quad \text{y} \quad X > x + \varepsilon$$

resultará

$$X - \varepsilon < X_n < X + \varepsilon \quad \text{y} \quad X > x + \varepsilon$$

luego $x = (x + \varepsilon) - \varepsilon < X - \varepsilon < X_n < X + \varepsilon \implies X_n > x$, o sea:

$$(|X_n - X| < \varepsilon) \cap (X > x + \varepsilon) \subset (X_n > x)$$

y complementando

$$(X_n \leq x) \subset (|X_n - X| \geq \varepsilon) \cup (X \leq x + \varepsilon)$$

luego $F_{X_n}(x) \leq P(|X_n - X| \geq \varepsilon) + F_X(x + \varepsilon)$ y tomando $\overline{\lim_{n\to\infty}}$ (ya que en x, no tenemos asegurada la convergencia de $F_{X_n}(x)$)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) \ \ (\text{usando que } \ X_n \xrightarrow{P} X)$$

y tendiendo $\varepsilon \to 0$, (usando la continuidad de F_X en x)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n}(x) \leq F_X(x) \tag{15}$$

en forma similar, pero partiendo de

$$(X < x - \varepsilon) \subset (X_n \leq x) \cup (|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

y tomando límite inferior se llega a:

$$F_X(x) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n}(x) \tag{16}$$

luego juntando (15) y (16)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n}(x) \leq F_X(x) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n}(x)$$

y de aquí sale que $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

Dem(d):

Si usamos la desigualdad de Markov aplicada a $X_n - X$ y $g(x) = x^2$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X_n - X)^2}{\varepsilon^2}$ que por hipótesis $\to 0$, cuando $n \to \infty$.

4.0.1 Observación

- En la definición de convergencia en distribución se exigió una condición de continuidad. Veamos el porqué de esta exigencia. Consideremos la sucesión de v.a. constantes

$$X_n = \frac{1}{n}, \quad \text{o sea:} \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

  Claramente X_n converge a $X = 0$, en los cuatro primeros tipos de convergencia. Pero veamos que pasa con la convergencia en distribución:

$$\begin{array}{l} \text{para } x > 0,\ F_{X_n}(x) \to 1 = F_X(x) \\ \text{para } x < 0,\ F_{X_n}(x) \to 0 = F_X(x) \end{array}$$

  pero para $x = 0$, que no es punto de continuidad de $F_X(x)$, resulta $F_{X_n}(0) \to 0 \neq 1 = F_X(0)$. Luego la exigencia de convergencia solo en los puntos de continuidad de $F_X(x)$, permite la validez de la implicación (c) anterior.

- En (c), si X es una constante, vale el $\Longleftrightarrow$. O sea vale:

$$X_n \xrightarrow{P} c \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{D} c$$

  Se verán ahora algunos ejemplos de implicaciones que no son ciertas.

4.1 Ejemplos de implicaciones que no son válidas

4.1.1 Ejemplo 1 $(X_n \xrightarrow{c.t.p} X \quad \not\Leftarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X)$

Sea la sucesión $X_1, X_2, .., X_n, ..$ de v.a. independientes con: $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$ pero sin embargo $X_n \overset{c.t.p}{\nrightarrow} 0$.

Solución:

Como $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - 0| < \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$ resulta que $X_n \xrightarrow{P} 0$. Veamos la convergencia en casi todo punto. Defino

$$\forall \varepsilon > 0,\ A_n^{\varepsilon c} = \{|X_n - 0| \geq \varepsilon\},\ \text{con} \ \ P(A_n^{\varepsilon c}) = \frac{1}{n}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n^{\varepsilon c}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Longrightarrow P(A_\infty^{\varepsilon}) = 0 \neq 1$. Luego $X_n \overset{c.t.p}{\nrightarrow} 0$.

Observación:

Notar que si la función de probabilidad de las X_i fuese $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ y $P(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}$ resultaría también que $X_n \xrightarrow{P} 0$ (ya que $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = 1$) y además $X_n \xrightarrow{c.t.p} 0$ ya que ahora $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n^{\varepsilon c}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Longrightarrow P(A_\infty^{\varepsilon}) = 1$.

4.1.2 Ejemplo 2 $(X_n \xrightarrow{mc} X \quad \not\Leftarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X)$

Sea la sucesión $X_1, X_2, .., X_n, ..$ de v.a. independientes con: $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$ probar que $X_n \xrightarrow{P} 0$ pero sin embargo $X_n \overset{mc}{\nrightarrow} 0$.

Solución

Como $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - 0| < \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 1$, resulta que $X_n \xrightarrow{P} 0$. Veamos ahora la convergencia en media cuadrática.

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - 0)^2 = \lim_{n\to\infty} E(X_n)^2 = \lim_{n\to\infty}\left[0^2(1 - \frac{1}{n}) + n^2\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

luego no se cumple la convergencia en media cuadrática.

4.1.3 Ejemplo 3 $(X_n \xrightarrow{mc} X \quad \not\Leftarrow \quad X_n \xrightarrow{c.t.p.} X)$

Sea $U \backsim U(0;1)$ y se define la sucesión de v.a. $X_n = n\,\mathrm{I}_{\{U < \frac{1}{n}\}}$.Verificar que la sucesión converge **c.t.p.** a 0, pero no en media cuadrática.

Solución:

Por de pronto notar que se trata de una sucesión de v.a. **no** independientes, ya que todas las X_i, dependen de la misma variable aleatoria U. Para aplicar el corolario de Borel-Cantelli defino:

$$\forall \varepsilon > 0,\ A_n^{\varepsilon c} = \{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = \left\{n\, I_{\{U < \frac{1}{n}\}} \geq \varepsilon\right\} = \left\{I_{\{U < \frac{1}{n}\}} \geq \frac{\varepsilon}{n}\right\}$$

como siempre $\frac{\varepsilon}{n} > 0$,

$$P(I_{\{U < \frac{1}{n}\}} \geq \frac{\varepsilon}{n}) = P(I_{\{U < \frac{1}{n}\}} = 1) = P(U < \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$$

luego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n^{\varepsilon c}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Como esta serie no es convergente, no podemos concluir que $P(A_\infty^\varepsilon) = 1$, como queríamos. Pero tampoco que $P(A_\infty^\varepsilon) = 0$, ya que la segunda implicación del corolario de Borel-Cantelli exige que los A_n^ε sean independientes, y aquí esto no es cierto. Sin embargo notar que $\forall u > 0$, todas las $X_n = 0$ a partir de $n > \frac{1}{u}$. Luego $X_n \xrightarrow{c.t.p.} 0$. Veamos la convergencia en media cuadrática.

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - 0)^2 = \lim_{n\to\infty} E(n\, I_{\{U < \frac{1}{n}\}})^2 = \lim_{n\to\infty} n^2 E(\, I^2_{\{U < \frac{1}{n}\}})$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 P(U < \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} n^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Luego no se cumple la convergencia en media cuadrática.

5 Conservación por Funciones continuas

Tanto la convergencia punto a punto, en casi todo punto como en probabilidad se conservan a través de las funciones continuas.O sea:

$$
\begin{array}{l}
\text{Si } g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es } \textbf{continua}\text{, valen:} \\
X_n \longrightarrow X, \quad Y_n \longrightarrow Y \implies g(X_n, Y_n) \longrightarrow g(X, Y) \\
X_n \xrightarrow{c.t.p} X, \quad Y_n \xrightarrow{c.t.p} Y \implies g(X_n, Y_n) \xrightarrow{c.t.p} g(X, Y) \\
X_n \xrightarrow{p} X, \quad Y_n \xrightarrow{p} Y \implies g(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} g(X, Y)
\end{array}
\tag{17}
$$

Dem: (solo para convergencia **c.t.p.**)

Sea

$$
\begin{array}{ll}
\Theta_X = \{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} & \text{con } P(\Theta_X) = 1 \\
\Theta_Y = \{\omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\} & \text{con } P(\Theta_Y) = 1
\end{array}
$$

como

$$0 \leq P(\Theta_X \cap \Theta_Y)^c = P(\Theta_X^c \cup \Theta_Y^c) \leq P(\Theta_X^c) + P(\Theta_Y^c) = 0$$

Luego resulta también que $P(\Theta_X \cap \Theta_Y) = 1$. Pero si $\omega \in \Theta_X \cap \Theta_Y$,es punto de convergencia de $X_n(\omega)$ y de $Y_n(\omega)$,y al ser g continua, será punto de convergencia también de $g(X_n, Y_n)$. O sea,

$$\omega \in \{\omega : g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)\}$$

luego vale la inclusión

$$\Theta_X \cap \Theta_Y \subset \{\omega : g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)\}$$

y tomando probabilidad

$$1 = P(\Theta_X \cap \Theta_Y) \leq P\{\omega : g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)\} \leq 1$$

Luego $P\{\omega : g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)\} = 1$, y resulta la tesis.

- En particular si $X_n \xrightarrow{ctp} X, \quad Y_n \xrightarrow{ctp} Y$ valdrán también:

$$
\begin{array}{l}
X_n + Y_n \xrightarrow{ctp} X + Y \\
X_n Y_n \xrightarrow{ctp} XY \\
X_n / Y_n \xrightarrow{ctp} X/Y \ (\text{si } P(Y = 0) = 0)
\end{array}
$$

- Y si $X_n \xrightarrow{p} X, \quad Y_n \xrightarrow{p} Y$ valdrán también:

$$
\begin{array}{l}
X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y \\
X_n Y_n \xrightarrow{p} XY \\
X_n / Y_n \xrightarrow{p} X/Y \ (\text{si } P(Y = 0) = 0)
\end{array}
$$

Notar que este teorema de conservación **no vale** para la convergencia en distribución, o sea

$$X_n \xrightarrow{d} X, \quad Y_n \xrightarrow{d} Y \ \nRightarrow g(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} g(X,Y)$$

ya que al ser tanto X como Y, variables dummy, no conocemos su comportamiento conjunto, y por lo tanto tampoco el de $g(X,Y)$.

Sin embargo vale

$$X_n \xrightarrow{d} X \Longrightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$$

6 Leyes de los grandes números

6.1 Ley débil de los grandes números

Sea la sucesión de v.a.**no correlacionadas** $X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...$con

$$E(X_i) = \mu_i \quad \text{y} \quad Var(X_i) = \sigma_i^2$$

Sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, y la nueva sucesión $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, ..., \overline{X}_n, \ldots$ Luego si:

$$\lim_{n\to\infty} Var(\overline{X}_n) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \left(\overline{X}_n - \ E(\overline{X}_n)\right) \xrightarrow{p} 0$$

Dem:

Usando Tchebichev $P(\left|\overline{X}_n - \ E(\overline{X}_n)\right| \geq \varepsilon) \leq Var(\overline{X}_n)/\varepsilon^2$,y tomando límite.

6.1.1 Comentarios

- Notar que si las σ_i^2 están acotadas, o sea si $\forall i, \sigma_i^2 \leq K$

$$Var(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + .. + \sigma_n^2) \leq \frac{1}{n^2} nK = K/n \to 0$$

  luego vale la ley débil.

- Sean $X_1, X_2, X_3, ., X_n$, observaciones **i.i.d** de una v.a. X con media μ, y desvío σ. Como $E(\overline{X}_n) = \mu$ y $Var(\overline{X}_n) = \sigma^2/n \to 0$. Resulta que

$$\left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow{p} 0$$

  o sea

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

  Notar que esto justifica el tomar el promedio de observaciones independientes de una v.a. X, como una estimación de su media μ.

- Supóngase un experiento aleatorio ε, y un espacio de probabilidad (Ω, A, P).Sea $A \subset \Omega$, un suceso del cual queremos estimar $P(A)$. Ahora se repite en forma independiente el experimento ε, registrando cada vez el valor de la v.a.

$$X_i = I_A(\omega_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } & \omega_i \in A \\ 0 \text{ si } & \omega_i \notin A \end{cases}$$

  luego

$$E(X_i) = E(I_A(\omega_i)) = P(A) \quad \text{y} \quad Var(X_i) = Var(I_A(\omega_i)) = P(A)(1-P(A))$$

  Se tiene entonces la sucesión de v.a. **i.i.d.** $I_A(\omega_1), I_A(\omega_2), ..., I_A(\omega_n)$..con media $P(A)$ y desvío $\sqrt{P(A)(1-P(A))}$. Según el resultado anterior resultará $\overline{I_A(\omega_n)} \xrightarrow{p} .P(A)$.Pero:

$$\begin{aligned} \overline{I_A(\omega_n)} &= (I_A(\omega_1) + I_A(\omega_2) + ... + I_A(\omega_n))/n \\ &= (\# \text{ realizaciones de A en las } \mathbf{n} \text{ repeticionesde } \varepsilon)/n \\ &= \text{frecuencia relativa de A} = f_r A \end{aligned}$$

  Luego

$$f_r A \xrightarrow{p} P(A)$$

6.2 Ley fuerte de los grandes números

Sea la sucesión de v.a.**independientes** $X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...$con

$$E(X_i) = \mu_i \quad \text{y} \quad Var(X_i) = \sigma_i^2$$

Sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, y la nueva sucesión $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, ..., \overline{X}_n \ldots,$.Luego si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2/i^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \left(\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right) \xrightarrow{c.t.p} 0$$

6.2.1 Comentarios

- Notar que si las σ_i^2 están acotadas, o sea $\forall i, \sigma_i^2 \leq K$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2/i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} K^2/i^2 \leq K^2 \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2 < \infty$$

  luego vale la ley fuerte.

- Por este motivo se aplican los comentarios hechos respecto de la ley débil y valdrán

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.t.p.} \mu \qquad \text{y} \qquad f_r A \xrightarrow{c.t.p.} P(A) \quad .$$

- Se mencionará la **Ley fuerte de Kolmogorov.** Sea la sucesión de v.a **iid** $X_1, X_2, X_3, ..., X_n, ...$con $E(X_i) = \mu$. Sea $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,y la nueva sucesión $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, ..., \overline{X}_n,$ .Luego :

$$\overline{X}_n \overset{c.t.p.}{\longrightarrow} \mu$$

Notar que este teorema agrega la exigencia que las variables esten **idénticamente distribuídas,**con media común μ, pero que no requiere la existencia de σ^2.

7 Teorema de la Convergencia Dominada

Una sucesión de v.a.X_n puede converger a otra v.a. X, sin embargo no siempre ocurre que la sucesión de medias $E(X_n)$ converge a $E(X)$.Las condiciones para esto se dan en el siguiente Teorema(Lebesgue).Sean la sucesión $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ y las v.a. X y Z, todas en el espacio (Ω, A, P).Con

$$Z \geq 0, \;\; E(Z) < \infty, \;\; \text{y} \;\; |X_n| \leq Z \; \forall n$$

Luego sí:

$$X_n \overset{p}{\longrightarrow} X \quad \Longrightarrow \quad E(X_n) \longrightarrow E(X)$$

7.0.2 Ejemplo $X_n \overset{p}{\longrightarrow} X \nRightarrow E(X_n) \longrightarrow E(X)$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$con $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$. Probar que $X_n \overset{p}{\longrightarrow} 0$ pero $E(X_n) \nrightarrow E(X) = 0$.Como:

$$\forall \varepsilon > 0, \; \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| < \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \quad \text{luego} \quad X_n \overset{p}{\longrightarrow} 0$$

pero:

$$\forall n, \;\; E(X_n) = 0(1 - \frac{1}{n}) + n\frac{1}{n} = 1 \quad \text{luego} \;\; E(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = E(X)$$

8 Alcances de los tipos de convergencia

Planteamos en la introducción, en el caso de convergencia, si para n grande podremos en algún sentido reemplazar X_n, por X, precisando el **alcance** de este reemplazo. O sea si podemos:

- Aproximar $P(X_n \leqq a)$ por $P(X \leqq a)$?

  Si se cumple $X_n \overset{D}{\to} X$, resultará $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en todo x de continuidad.de $F_X(x)$.Esto es $\lim_{n\to\infty} P(X_n \leqq a) = P(X \leqq a)$ O sea, ya que la convergencia en distribución es la más débil de los cuatro tipos de convergencia estudiados, la aproximación de $P(X_n \leqq a)$ por $P(X \leqq a)$ será válida para las cuatro convergencias, solo con la restricción que $F_X(x)$ sea continua en a.

- Aproximar $E(X_n)$ por $E(X)$?

  Vimos que si se cumplen las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada la aproximación de $E(X_n)$ por $E(X)$ sí será posible.

- si Z es otra v.a. en el mismo espacio, aproximar $\rho_{X_n,Z}$ por $\rho_{X,Z}$?

  Dado que $\rho_{X_n,Z} = [E(X_n Z) - E(X_n)E(Z)] / \sqrt{E(X_n^2) - E^2(X_n)}\sqrt{\sigma_Z^2}$ aquí nuevamente necesitaremos el Teorema de Convergencia Dominada, para asegurar el cumplimiento de:

  $$E(X_n Z) \xrightarrow{p} E(XZ), \quad E(X_n) \xrightarrow{p} E(X), \quad E(X_n^2) \xrightarrow{p} E(X^2)$$

  y desde ya, suponiendo que $\sigma_X^2 \neq 0$, y $\sigma_Z^2 \neq 0$.

9 Problemas

9.0.3 Problema 1

Supongase que la concentración de una substancia en un producto medicinal es una variable aleatoria $C \backsim N(\mu_c; \sigma_c)$, en p.p.m.(partes por millón).Y que para determinar esta concentración se utiliza un instrumento, que tiene un error aleatorio $E \backsim N(0; \sigma_e)$.Para atenuar el efecto del error del instrumento, se propone efectuar n determinaciones de concentración y promediarlas. Dado que en cada determinación el valor que proporciona el instrumento es $X_i = C + E_i$, el promedio de n determinaciones será

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= \frac{(C+E_1)+(C+E_2)+(C+E_3)+....+(C+E_n)}{n} \\ &= C + \frac{E_1+E_2+E_3+...E_n}{n} \end{aligned}$$

Se quiere estudiar la posible convergencia de

$$\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, ..., \overline{X}_n, \ldots \longrightarrow C$$

Notar que en términos prácticos, esto justificaría la propuesta de efectuar n determinaciones y promediarlas, ya que esto atenua el efecto del error del instrumento. Podemos tomar como experimento aleatorio a

ε : "tomar un producto y determinar la concentración una infinidad de veces"

y el espacio muestral en que están definidas todas estas variables aleatorias a:

$\Omega = \{\omega : \omega = (c, e_1, e_2, e_3, ..., e_n, ...), c = \text{"concentración"}, e_i = \text{"errores"}\}$

(a) Convergencia punto a punto

Tomemos un producto cuya concentración es c =10 ppm, y supongamos que en todas las determinaciones del instrumento el error es e_i =2 ppm, luego

$$\omega = (10, 2, 2, 2, ..., 2, ...)$$

y la sucesión $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, ..., \overline{X}_n, \ldots$quedaría $12, 12, 12, ..., 12, ... \nrightarrow 10$ claramente no convergente. Luego no se cumple la convergencia funcional. ya que $\Theta \neq \Omega$.

(b) Convergencia en probabilidad

Tenemos que ver si $\forall \varepsilon > 0, \ \underset{n\to\infty}{lím} \ P(\left|\overline{X}_n - C\right| < \varepsilon) = 1$

pero
$$\begin{aligned} P(\left|\overline{X}_n - C\right| < \varepsilon) &= P(\left|C + \tfrac{E_1+E_2+E_3+...E_n}{n} - C\right| < \varepsilon) \\ &= P(\left|\tfrac{E_1+E_2+E_3+...E_n}{n}\right| < \varepsilon) \\ &= \Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_{e)} - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_{e)} \\ &= 1 - 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_{e)} \longrightarrow 1(\text{para } n \to \infty) \end{aligned}$$

Luego $\overline{X}_n \xrightarrow{P} C$.

(c) Convergencia en casi todo punto

Habría que ver sí

$$\forall \varepsilon > 0, \ \underset{n_0\to\infty}{lím} P(\bigcap_{n \geqq n_0} (\left|\bar{\overline{X}}_n - C\right| < \varepsilon)) = 1$$

Pero mejor utilicemos la otra definición: $\forall \varepsilon > 0, P(A_\infty^\varepsilon) = 1$,tratando de apoyarnos en el corolario del Lema de Borel-Cantelli. Definimos

$$A_n^{\varepsilon c} = \left\{\omega \in \Omega : \left|\bar{\overline{X}}_n - C\right| \geq \varepsilon\right\}$$

Luego

$$P(A_n^{\varepsilon c}) = P(\left|\bar{\overline{X}}_n - C\right| \geq \varepsilon) = 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_{e)}$$

O sea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^{\varepsilon c}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_{e)}$$

Pero a partir de cierto u_0 vale $\Phi(-u) \leq 1/u^4$ luego (PROBARLO)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^{\varepsilon c}) \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_{e)} + \frac{2\sigma_e^4}{\varepsilon^4} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

que es convergente, entonces por el corolario de Borell-Cantelli resulta que $P(A_\infty^\varepsilon) = 1$, y de aquí sale que $\bar{\overline{X}}_n \xrightarrow{c.t.p.} C$.

(d) Convergencia en media cuadrática

Tengo que analizar $\lim_{n\to\infty} E(\bar{X}_n - C)^2 = \lim_{n\to\infty} E(\frac{E_1+E_2+E_3+...E_n}{n})^2 =$
$\lim_{n\to\infty} \left[E^2(\frac{E_1+E_2+E_3+...E_n}{n}) + Var(\frac{E_1+E_2+E_3+...E_n}{n})\right] = \lim_{n\to\infty} \left[0 + \frac{\sigma_e^2}{n}\right] = 0$
Luego $\bar{X}_n \xrightarrow{mc} C$.

(e) Convergencia en distribución

Consideremos la sucesión $F_{\bar{X}_1}, F_{\bar{X}_2}, F_{\bar{X}_3}, ...F_{\bar{X}_n}, ...$
Como $\bar{X}_n = C + \frac{E_1+E_2+E_3+...E_n}{n}$ resultará $\bar{X}_n \tilde{} N(\mu_c\,; \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_e^2/n})$
Luego $F_{\bar{X}_n}(u) = \Phi((u-\mu_c)/\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_e^2/n})$
pero $\lim_{n\to\infty} (u-\mu_c)/\sqrt{\sigma_c^2+\sigma_e^2/n} = (u-\mu_c)/\sigma_c$ y al ser Φ función continua
resulta $\lim_{n\to\infty} F_{\bar{X}_n}(u) = \Phi((u-\mu_c)/\sigma_c) = F_C(u)$
Luego $\bar{X}_n \xrightarrow{d} C$.

(b) y (c) de otra forma

Considérese la sucesión de variables aleatorias independientes

$$E_1, E_2, E_3, ..., E_n, ... \quad con E(E_i) = 0 \quad Var(E_i) = \sigma_e^2$$

y la sucesión de $\bar{E}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i$ como

$$Var(\bar{E}_n) = \frac{\sigma_e^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ vale la } \textbf{Ley débil} \text{ y } \bar{E}_n \xrightarrow{p} 0$$

Además como $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_e^2/i^2 = \sigma_e^2 \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2 < \infty$ vale también la **Ley fuerte** y

$$\bar{E}_n \xrightarrow{c.t.p.} 0$$

Consideremos ahora la sucesión de variables aleatorias $C, C, C, ..., C, ...$se tendrá también que

$$C \xrightarrow{p} C \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{c.t.p.} C$$

Luego aplicando la conservación de la convergencia a través de funciones continuas(y la suma lo es)

$$C \xrightarrow{p} C, \quad \bar{E}_n \xrightarrow{p} 0 \implies (C + \bar{E}_n) \xrightarrow{p} C \quad \text{o sea } \bar{X}_n \xrightarrow{p} C$$

$$C \xrightarrow{c.t.p.} C, \quad \bar{E}_n \xrightarrow{c.t.p.} 0 \implies (C + \bar{E}_n) \xrightarrow{c.t.p.} C \quad \text{o sea} \bar{X}_n \xrightarrow{c.t.p.} C$$

9.0.4 Problema 2

Sean $X_1, X_2, ..., X_n, ..$ v.a. i.i.d. $U(0;\theta)$. Se definen:

$$X_{(1)n} = m\acute{\imath}n(X_1, X_2, .., X_n), \qquad X_{(n)n} = m\acute{a}x(X_1, X_2, .., X_n)$$

$$U_n = nX_{(1)n}, \quad V_n = n(\theta - X_{(n)n})$$

Probar que:

(a) $X_{(1)n} \xrightarrow{p} 0$

(b) $X_{(n)n} \xrightarrow{p} \theta$

(c) $U_n \xrightarrow{d} U$, con $U \backsim G(1; \frac{1}{\theta})$

(d) $V_n \xrightarrow{d} V$, con $V \backsim G(1; \frac{1}{\theta})$

En lo que sigue se usará lo siguiente:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)n}}(x) = P(X_{(1)n} \leq x) &= 1 - P(X_{(1)n} > x) \\ &= 1 - P\left[(X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \cdots \cap (X_n > x)\right] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - \left(\tfrac{\theta - x}{\theta}\right)^n = 1 - \left(1 - \tfrac{x}{\theta}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)n}}(x) = P(X_{(n)n} \leq x) &= P\left[(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \cdots \cap (X_n \leq x)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = (\tfrac{x}{\theta})^n \end{aligned}$$

Sol(a):

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(\left|X_{(1)n} - 0\right| < \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(X_{(1)n} < \varepsilon) \\ = \lim_{n\to\infty} F_{X_{(1)n}}(\varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \tfrac{\varepsilon}{\theta}\right)^n\right] = 1 \end{aligned}$$

Sol(b):

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(\left|X_{(n)n} - \theta\right| < \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(-(X_{(n)n} - \theta) < \varepsilon) \\ = \lim_{n\to\infty} P(X_{(n)n} > \theta - \varepsilon) &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(X_{(n)n} \leq \theta - \varepsilon) \\ = 1 - \lim_{n\to\infty} F_{X_{(n)n}}(\theta - \varepsilon) &= 1 - \lim_{n\to\infty} (\tfrac{\theta - \varepsilon}{\theta})^n = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - \tfrac{\varepsilon}{\theta})^n = 1 \end{aligned}$$

Sol(c):

Analicemos $F_{U_n}(u) = P(U_n \leq u) = P(nX_{(1)n} \leq u) = P(X_{(1)n} \leq \frac{u}{n})$

$= F_{X_{(1)n}}(\frac{u}{n}) = 1 - \left(1 - \frac{u}{n\theta}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{u/\theta}{n}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{u/\theta}{n}\right)^n\right] = 1 - e^{-\frac{u}{\theta}}$

pero si $F_U(u) = 1 - e^{-\frac{u}{\theta}}$ resulta $U\tilde{\ }G(1; \frac{1}{\theta})$, luego resulta la tesis.

Sol(d):

Analicemos $F_{V_n}(v) = P(V_n \leq v) = P(n(\theta - X_{(n)n}) \leq v) = P(X_{(n)n} \geq \theta - \frac{v}{n})$

$= 1 - F_{X_{(1)n}}(\theta - \frac{v}{n}) = 1 - (1 - \frac{v}{n\theta})^n = 1 - \left(1 - \frac{v/\theta}{n}\right)^n$

luego $\lim_{n\to\infty} F_{V_n}(v) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{v/\theta}{n}\right)^n\right] = 1 - e^{-\frac{v}{\theta}}$

pero si $F_V(v) = 1 - e^{-\frac{v}{\theta}}$ resulta $V \backsim G(1; \frac{1}{\theta})$, luego resulta la tesis.

9.0.5 Problema 3

Sean $X_1, X_2, ..., X_n, ..$ v.a. i.i.d. $U(0;\theta)$. Hallar el límite en c.t.p. de

$$Y_n = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}}$$

Sol: expresando

$$Y_n = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

y como la sucesión de v.a. independientes .$\ln X_1, \ln X_2, .., \ln X_n, ..$tiene

$$E(\ln X_i) = \int_0^\theta \ln x \frac{1}{\theta} dx = \ln\theta - 1, \quad \text{y} \quad Var(\ln X_i) = \sigma^2 < \infty$$

y

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 / i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2 < \infty$$

por la Ley Fuerte resulta $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i \overset{c.t.p.}{\longrightarrow} \ln\theta - 1$, y por el Teorema de Conservación. de Convergencia para funciones continuas

$$Y_n = e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i} \overset{c.t.p.}{\longrightarrow} e^{\ln\theta - 1} = \theta e^{-1}$$